4. Januar 2004

Zur Wirbeltheorie der Elektrodynamik

Horst Eckardt

horsteck@aol.com

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die Maxwellschen Gleichungen aus den Faraday-Gleichungen im Rahmen einer Feldtheorie herleitbar sind. Dabei muß eine räumliche Variation der Relativgeschwindigkeit zwischen Feld und Beobachter vernachlässigbar sein. Sofern dies nicht der Fall ist, hat man zur Beschreibung aller elektromagnetischen Effekte von den originalen Faraday-Gleichungen auszugehen. Im Rahmen einer reinen Feldtheorie stellen diese die Bestimmungsgleichungen der Felder dar, sind allerdings nicht voneinander unabhängig. Aus ihnen lassen sich direkt zwei zueinander duale Wirbelgleichungen ableiten. Diese zeigen alle Effekte der von K. Meyl postulierten Potentialwirbel. Energie- und Impulsbilanz stellen eine Verallgemeinerung der von der Maxwell-Theorie bekannten Ergebnisse dar. Die Wirbeleffekte werden an einem analytischen Beispiel demonstriert.

Inhalt

1 Einleitung

Die Elektrodynamik ist ein etablierter Zweig der heutigen Physik und Technik. Alle Aussagen beruhen auf einem experimentell sehr gut abgesicherten theoretischen Fundament, den Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes. Demgegenüber weist Konstantin Meyl in seinen Schriften [1-3] darauf hin, daß viele Erscheinungen, für die es heute keine zuverlässigen Erklärungen gibt, mit einem alternativen Zugang zu den Grundlagen der Elektrotechnik erklärbar werden. Es handelt sich hierbei um die sog. Potentialwirbeltheorie, die von ihm mehr oder weniger postuliert oder plausibel gemacht wird. Durch Vergleiche der daraus resultierenden Wirbeleffekte mit der Strömungsmechanik lassen sich gewisse Analogieschlüsse ziehen. Was fehlt, ist eine theoretische Ableitung der Feldwirbel aus einem axiomatischen System, wie es heute für die Maxwellschen Gleichungen, die Newtonsche Mechanik oder die allgemeine Relativitätstheorie vorliegt.

Die weitreichenden Konsequenzen rechtfertigen es, sich mit diesen Ansätzen genauer zu beschäftigen und sie auf eine möglichst saubere theoretische Grundlage zu stellen. Es wird sich zeigen, daß die Maxwellschen Gleichungen aus dem teilweise schon von Faraday gefundenen Ansatz korrekt abgeleitet werden können. Dabei tritt ein zusätzlicher Term auf, die Potentialstromdichte, die bislang in dieser Theorie nicht vorhanden war.

Die Maxwelltheorie ist aber nicht in der Lage, Wirbel im Sinne der Strömungsmechanik zu beschreiben, wo die Srömung (d.h. die Geschwindigkeitsverteilung des sich bewegenden Mediums) selbst eine Wirbelbewegung vollführt. Es stellt sich heraus, daß der Faraday-Ansatz – im Gegensatz zum Maxwellschen – hierzu sehr wohl in der Lage ist. Es ergeben sich auf direktem Wege zwei Wirbelgleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

Die Feldgleichungen selbst reichen nicht aus, um eine zeitliche Entwicklung der Felder aufgrund gegebener Anfangsbedingungen zu beschreiben. Es müssen Erhaltungssätze berücksichtigt werden. Aus diesem Grund werden Ausdrücke für die Energie- und Impulsbilanz hergeleitet, die eine Verallgemeinerung der entsprechenden Ableitungen aus der Maxwell-Theorie darstellen. Mithilfe dieser Ausdrücke kann zumindest ein prinzipieller Weg aufgezeigt werden, wie man auf feldtheoretischer Basis zu Lösungen der elektromagnetischen Feldgleichungen gelangen kann, die alle Wirbeleffekte mit einschließen. Dies wird an einer Beispielrechnung verdeutlicht.

Dieser Artikel soll eine Basis für weitere Diskussionen in Fachkreisen bereitstellen.

Im folgenden werden Vektoren mit Unterstrich dargestellt, Matrizen und Tensoren im Fettdruck. Im Anhang A sind die verwendeten Definitionen und Identitäten der Vektoranalysis zusammengefaßt.

2 Die Faraday-Gleichungen

2.1 Experimenteller Befund

Auf bewegte Ladungen wirkt in einem statischen Magnetfeld eine Kraft, die sog. Lorentz-Kraft. Diese tritt aufgrund eines elektrischen Zusatzfeldes auf, das bewegte Ladungen in einem Magnetfeld erfahren, das relativ zum Betrachter ruht. Wenn sich die Ladung –e mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegt, findet man experimentell für die Kraft

$$\underline{F} = -e\underline{E}$$

mit dem elektrischen Zusatzfeld

$$\underline{E} = \underline{v} \times \underline{B} \qquad (1)$$

(s. Abb. 1).

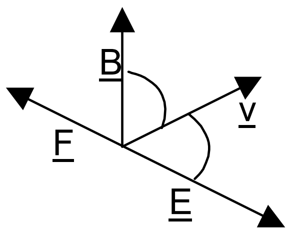


Abbildung 1: Feldgrößen der Lorentzkraft

Nach dem Relativitätsprinzip tritt das Zusatzfeld auch auf, wenn die Ladung im Bezugssystem des Beobachters ruht und sich das Magnetfeld bewegt. Man könnte einwenden, daß sich ein unendlich ausgedehntes, bewegtes statisches Magnetfeld gar nicht von einem ruhenden unterscheiden läßt, da die Feldstärke immer gleich ist ($\partial \underline{B}/\partial t = 0$). Man findet aber experimentell, daß Gl. (1) auch in diesem Fall gilt, und zwar bei dem in [1] beschriebenen Faraday-Generator.

Außer der Gl. (1) gibt es auch eine analoge Gleichung für das magnetische Zusatzfeld, das bewegte elektrische Felder erzeugen ([7], s. Diskussion hierzu in [1]):

$$\underline{H} = -\underline{v} \times \underline{D}. \qquad (2)$$

Dieses Gesetz wird selten beschrieben, bildet aber das „duale" Gegenstück zu (1). Insgesamt können wir festhalten, daß man dem elektromagnetischen Feld einen Bewegungszustand zuordnen kann und das wahrgenommene Feld von diesem abhängt.

2.2 Feldtheoretischer Ansatz

Ausgehend von den experimentellen Befunden wollen nun ein Axiom aufstellen, das für elektromagnetische Felder, die einen beliebig ausgedehnten Raumbereich ausfüllen, eine Aussage trifft. Auch Zeitabhängigkeit lassen wir zu.

Folgerichtig müssen wir nun eine *Feldtheorie* aufstellen, d.h. die Felder sind vektorwertige Abbildungen $\underline{E}(\underline{x}, t)$, $\underline{H}(\underline{x}, t)$. Wir betrachten diese Größen als „elementare" Größen, aus denen sich andere wie Kräfte oder Potentiale ableiten lassen. Dies ist darin begründet, daß in der Beschreibung des experimentellen Befundes (Gl. (1), (2)) keine Teilchen (etwa Elementarladungen) auftreten.

Wir lassen als Gültigkeitsbereich das Vakuum zu oder solche Raumbereiche, die sich mit einer konstanten Dielektrizitätskonstanten (ε) und Permeabilität (μ) beschreiben lassen. Wir beschränken uns in der Herleitung auf das Vakuum. Es gelten dann die Materialgleichungen

$$\underline{D} = \varepsilon_0\, \underline{E}, \qquad \underline{B} = \mu_0\, \underline{H}.$$

ε_0 und μ_0 sind experimentell zu bestimmende Konstanten, die mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c in der Beziehung

$$1/c^2 = \varepsilon_0\, \mu_0$$

stehen[1]. Wir wählen eine „gemischte" Darstellung ($\underline{E}$ und $\underline{B}$), da diese Felder in der Praxis am meisten verwendet werden. Dafür nehmen wir einige zusätzliche Konstanten inkauf. Das Axiom lautet nun:

Axiom 1 (Faraday-Gesetz). Ein Beobachter, der sich im Bewegungszustand $\underline{v}$ relativ zu einem elektromagnetisches Feld ($\underline{E}$, $\underline{B}$) befindet, bemerkt in seinem mitbewegten Bezugssystem die Zusatzfelder $\underline{E}$‘, $\underline{B}$‘ der Form

[1] Dieser Zusammenhang folgt aus der Ausbreitung elektromagnetischer (Hertzscher) Wellen. Im Prinzip müssen zwei der drei Größen experimentell bestimmt werden.

$\underline{E}' = \underline{v} \times \underline{B}$, (3a)

$\underline{B}' = - 1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}$. (3b)

Außerdem machen wir später Gebrauch von der Relativität der Bewegungen. Wir formulieren dies hier auch als Axiom:

Axiom 2 (Relativitätsprinzip). Wenn ein Beobachter in einem zu ihm ruhenden Bezugssystem die Relativgeschwindigkeit $\underline{v}$ eines zweiten Bezugssystem feststellt, dann dann stellt ein Beobachter, der im zweiten System ruht, eine Relativbewegung $-\underline{v}$ des ersten Bezugssystems fest.

Wir haben hierbei keine Aussagen über eine etwaige Addition von Geschwindigkeiten gemacht, es handelt sich um eine schwache Formulierung des Relativitätsprinzips.

In den Axiomen tritt neben den elektromagnetischen Feldern eine mechanische Größe, nämlich die Geschwindigkeit, auf. Da wir hier eine Feldtheorie betreiben, müssen wir sagen, was wir unter dem *Geschwindigkeitsfeld* verstehen wollen. Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, ein solches zu definieren (s. [4], S. 146).

Wenn man an die Bewegung von Massenpunkten denkt, ist die Geschwindigkeit deren Ortsvektor $\underline{r}$, abgeleitet nach der Zeit:

$$\underline{v} = d\underline{r}/dt.$$

Dabei ist $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ allein eine Funktion des Zeitparameters t. Bei einer Feldtheorie muß man anstatt von Massenpunkten die Bewegung infinitesimaler Volumina betrachten; dies ist die Standardvorgehensweise der Kontinuumsmechanik. Eine Geschwindigkeitsdefinition nach obiger Art würde bedeuten, daß man die Bewegung eines Volumenelements, das die Feldstärken $\underline{E}(\underline{x}, t)$, $\underline{B}(\underline{x}, t)$ besitzt, im Raum weiterverfolgen muß. Dieses erfährt während des Zeitraums Δt die Verrückung $\Delta\underline{u}$ aus der Lage $\underline{r}$. Demnach wäre

$$\underline{v} = d\underline{u}/dt = \partial\underline{u}/\partial t.$$

Zu verschiedenen Zeiten befindet sich also dieses Volumenelement an verschiedenen Orten. Im Rahmen der Feldtheorie ist es aber einfacher, von einem *ortsfesten* Geschwindigkeitsfeld auszugehen, d.h. die Geschwindigkeit $\underline{v}$ beschreibt am Ort $\underline{r}$ zu verschiedenen Zeiten verschiedene Volumenelemente, nämlich diejenigen, die sich dann gerade an diesem Ort befinden. Auch die Verrückungen sind dann eine zusätzliche Funktion des Ortes, und es gilt für die einzelnen Komponenten v_j der Geschwindigkeit:

$$v_j = du_j/dt = \partial u_j/\partial t + \Sigma_i\, \partial u_j/\partial x_i\, dx_i/dt,$$

oder in Operatorschreibweise (nach (A6), s. Anhang A für die Definitionen):

$$\underline{v} = d\underline{u}/dt = \partial\underline{u}/\partial t + (\underline{v}\ \mathrm{grad})\, \underline{u}. \qquad (4)$$

Wir verwenden von jetzt an diese Interpretation der Geschwindigkeit.

2.3 Transformationsverhalten und Abhängigkeit der Gleichungen

Wir wissen, daß ein elektrisches Feld ein zusätzliches magnetisches Feld bei einem bewegten Beobachter induziert und umgekehrt. Der Beobachter kann nicht erkennen, wie groß der Anteil des ursprünglichen Feldes ist, er nimmt nur das Gesamtfeld wahr. Deshalb wirkt der geschwindigkeitsabhängige Zusatzanteil z.B. des E-Feldes, der aus dem B-Feld entstanden ist, wieder auf das B-Feld zurück, so daß sich hier eine weitere Korrektur ergibt.

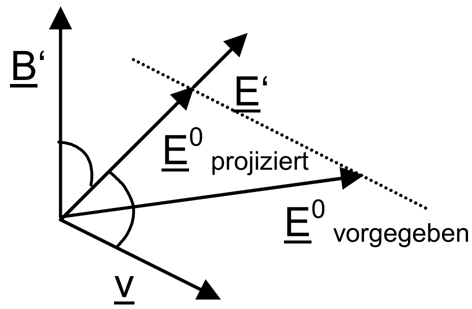


Abbildung 2: Rückwirkungseffekt

Um dies quantitativ nachzuvollziehen, gehen wir von den Gleichungen (3a,b) aus. Wir betrachten ein ruhendes Koordinatensystem A mit darin ruhenden Feldern $\underline{E}_A{}^0$, $\underline{B}_A{}^0$. Der Beobachter bewege sich in einer beliebigen Richtung mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$. Wir projizieren zunächst die Felder auf die zu $\underline{v}$ senkrechte Komponente (s. Abb. 2). Dies ändert nichts am Wert der Vektorprodukte. Dann entstehen im Bezugssystem B des Beobachters die Zusatzfelder mit den Bedingungen

$$\underline{E}_B{}' = \underline{v} \times \underline{B}_A{}^0, \qquad \underline{E}_B{}' \perp \underline{v}, \underline{B}_A{}^0, \qquad (5a)$$

$$\underline{B}_B{}' = -1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}_A{}^0, \qquad \underline{B}_B{}' \perp \underline{v}, \underline{E}_A{}^0. \qquad (5b)$$

Insgesamt ergibt sich

$$\underline{v} \perp \underline{E}_B{}', \underline{B}_B{}'.$$

Auch wenn die nicht-projizierten Ursprungsfelder $\underline{E}_A{}^0$, $\underline{B}_A{}^0$ nicht senkrecht auf $\underline{v}$ standen, trifft dies jetzt für die Zusatzfelder $\underline{E}_B{}'$ und $\underline{B}_B{}'$ zu. Diese induzieren im zweiten Betrachtungsschritt einen weiteren Feld-Anteil im System A, der sich durch Einsetzen von (5a,b) und mithilfe der Identität (A16) berechnen läßt zu

$$\underline{E}_A{}'' = -\underline{v} \times \underline{B}_B{}' = 1/c^2\, \underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{E}_A{}^0) = 1/c^2\, (\underline{v}\, (\underline{v}\, \underline{E}_A{}^0) - \underline{E}_A{}^0\, v^2),$$

$$\underline{B}_A{}'' = 1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}_B{}' = 1/c^2\, \underline{v} \times (\underline{v} \times \underline{B}_A{}^0) = 1/c^2\, (\underline{v}\, (\underline{v}\, \underline{B}_A{}^0) - \underline{B}_A{}^0\, v^2).$$

(Wegen der inversen Transformation sind hier die Vorzeichen von $\underline{v}$ andersherum zu setzen.) Nach Voraussetzung ist $\underline{E}_A{}^0 \perp \underline{v}$, das Skalarprodukt $\underline{v}\, \underline{E}_A{}^0$ muß also null sein, d.h. auch $\underline{E}_A{}''$ muß senkrecht auf $\underline{v}$ stehen. Wenn anfangs $\underline{E}_A{}^0 \perp \underline{B}_A{}^0$ war (was nicht notwendig vorausgesetzt war), sind die Felder $\underline{E}_A{}^0$, $\underline{E}_B{}'$, $\underline{E}_A{}''$ parallel. Das gleiche gilt für die B-Felder. $\underline{v}$, $\underline{E}$ und $\underline{B}$ bilden ein orthogonales Dreibein. Es ergibt sich also

$$\underline{E}_A{}'' = -v^2/c^2\, \underline{E}_A{}^0,$$

$$\underline{B}_A{}'' = -v^2/c^2\, \underline{B}_A{}^0.$$

Wir erweitern die Rückwirkung um eine weitere Stufe, die wiederum im System B wirksam wird:

$$\underline{E}_B{}''' = \underline{v} \times \underline{B}_A{}'' = -v^2/c^2\, \underline{v} \times \underline{B}_A{}^0,$$

$$\underline{B}_B{}''' = -1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}_A{}'' = v^2/c^4\, \underline{v} \times \underline{E}_A{}^0.$$

Damit sind alle Rückwirkungen bis zur Größenordnung v^2/c^2 erfaßt.

Zur Berechnung der Gesamtfelder im bewegten Bezugssystem B müssen alle Anteile, die in B wirken, aufaddiert werden:

$$\underline{E}_B{}^{ges} = \underline{E}_B{}' + \underline{E}_B{}''' = \underline{v} \times \underline{B}_A{}^0\, (1 - v^2/c^2), \qquad (6a)$$

$$\underline{B}_B{}^{ges} = \underline{B}_B{}' + \underline{B}_B{}''' = -1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}_A{}^0\, (1 - v^2/c^2). \qquad (6b)$$

Die Originalfelder werden also aufgrund der Rückwirkung im System B zusätzlich einer Lorentztransformation unterworfen. Das gleiche gilt für die Originalfelder in A:

$$\underline{E}_A{}^{ges} = \underline{E}_A{}^0 + \underline{E}_A{}'' = \underline{E}_A{}^0\, (1 - v^2/c^2),$$

$$\underline{B}_A^{ges} = \underline{B}_A^0 + \underline{B}_A'' = \underline{B}_A^0 (1 - v^2/c^2).$$

Es zeigt sich, daß die Gleichungen (3a,b) bei Berücksichtigung der Rückwirkungseffekte bis zur Ordnung v^2/c^2 in die Form (6a,b) übergehen. Der Rückwirkungseffekt tritt in Form der Lorentztransformation auf. Man kann dies auf die Längenkontraktion zurückführen, die ebenfalls durch den Faktor $(1 - v^2/c^2)$ beschrieben wird.

Folgerung 1: Die Faraday-Gleichungen unterliegen der Lorentztransformation:

Wenn sich zwei Bezugssysteme A und B mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v}$ gegeneinander bewegen, lauten die Faradaygleichungen im bewegen Bezugssystem B:

$$\underline{E}_B' = \underline{v} \times \underline{B}_A (1 - v^2/c^2), \qquad (7a)$$

$$\underline{B}_B' = -1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}_A (1 - v^2/c^2). \qquad (7b)$$

Die Felder transformieren sich gemäß

$$\underline{E}_B = \underline{E}_A (1 - v^2/c^2), \qquad (8a)$$

$$\underline{B}_B = \underline{B}_A (1 - v^2/c^2). \qquad (8b)$$

Insgesamt sind die Faradaygleichungen Lorentz-invariant.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die obigen Überlegungen nur für ein festes $\underline{v}(\underline{x},t)$ gelten, also nur für eine punktuelle Geschwindigkeit in der Raumzeit.

Wir wollen nun untersuchen, ob die Gln. (3a,b), die ja die geschwindigkeitsabhängigen Zusatzfelder beschreiben, auch als Bestimmungsgleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ selbst benutzt werden können. Die Felder sind dann identisch mit ihren Zusatzfeldern. Wir setzen E'=E und B'=B und setzen anschließend Gl. (3b) in Gl. (3a) ein:

$$\underline{E} = \underline{v} \times (-1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}) = -1/c^2 (\underline{v} (\underline{v}\, \underline{E}) - v^2\, \underline{E}).$$

Da $\underline{E}$ senkrecht auf $\underline{v}$ steht, verschwindet das Skalarprodukt $\underline{v}\ \underline{E}$, es ergibt sich die Bedingung

$$\underline{E} = v^2/c^2\, \underline{E},$$

woraus folgt

$$v^2/c^2 = 1.$$

Dies ist nur erfüllt für v=c. Die Richtung von $\underline{v}$ ist beliebig. Daraus ergibt sich

Folgerung 2: Für Relativbewegungen mit v=c (elektromagnetische Wellenausbreitung) gelten die Faradaygleichungen für die Felder selbst:

$$\underline{E} = \underline{v} \times \underline{B}, \qquad (9a)$$

$$\underline{B} = -\, 1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E}. \qquad (9b)$$

Damit sind zwei Bestimmungsgleichungen für die Felder gegeben. Diese sind allerdings nicht unabhängig voneinander und gelten nur für den Fall v=c.

3 Die Maxwellschen Gleichungen

In der klassischen Elektrodynamik werden die Maxwellschen Gleichungen axiomatisch eingeführt, meist nachdem man einige daraus abzuleitende Spezialfälle diskutiert hat, um den Ansatz plausibel zu machen. Wir gehen hier einen anderen Weg. Wir leiten die Maxwellschen Gleichungen aus Axiom 1 ab. Dabei sollte dann klar werden, unter welchen genauen Voraussetzungen sie gelten.

3.1 Herleitung

Wir gehen von den Transformationsgleichungen (3a,b) aus und wenden den rot-Operator zunächst auf Gl. (3a) an. Nach (A11) ist

$$\text{rot } E' = \text{rot } (v \times B) = (\underline{B}\text{ grad*})\,\underline{v} - (\underline{v}\text{ grad*})\,\underline{B} + \underline{v}\text{ div }\underline{B} - \underline{B}\text{ div }\underline{v}. \qquad (10)$$

Entsprechend der in 2.2 gegebenen Definition ist das Geschwindigkeitsfeld orts- und zeitabhängig. Dies ist der allgemeinste Fall. Physikalisch bedeutet dies, daß eine örtlich variierende Beschleunigung wirksam ist. Um Gl. (10) zu vereinfachen, machen wir eine wesentliche Annahme:

Annahme: Die Orts-Variation von $\underline{v}$ sei vernachlässigbar gegenüber der Zeit-Variation:

$$\partial\underline{u}/\partial t >> (\underline{v}\text{ grad})\,\underline{u}.$$

Dann gilt

$$\underline{v} = d\underline{u}/dt \approx \partial\underline{u}/\partial t.$$

Dies ist insbesondere der Fall, wenn es sich um eine unbeschleunigte Relativbewegung im Sinne der speziellen Relativitätstheorie handelt.

Die Komponenten u_i des Vektors der örtlichen Verrückungen um den Punkt $\underline{x}_0$ lassen sich schreiben:

$$u_i = x_i - x_{0i}, \quad i=1,2,3.$$

Daraus folgt, da die x_{0i} fest sind:

$$\partial u_i/\partial x_i = 1, \qquad \partial u_i/\partial t = \partial x_i/\partial t = v_i.$$

Damit können die vier Terme der rechten Seite von (10) umgeformt werden. Für die jeweilige Komponente j der Terme ergibt sich:

$$(\,(\underline{B}\text{ grad*})\,\underline{v}\,)_j = B_j\,\partial^2 x_j/\partial x_j\partial t = 0,$$

$$(\,(\underline{v}\text{ grad*})\,\underline{B}\,)_j = v_j\,\partial B_j/\partial x_j = \partial x_j/\partial t\,\partial B_j/\partial x_j = \partial x_j/\partial t\,\partial B_j/\partial t\,\partial t/\partial x_j = \partial B_j/\partial t,$$

$(\,\underline{v}\text{ div }\underline{B}\,)_j$ bleibt unverändert,

$$(\,\underline{B}\text{ div }\underline{v}\,)_j = B_j\,\Sigma_i\,\partial/\partial x_i\,(\partial x_i/\partial t) = B_j\,\Sigma_i\,\partial^2 x_i/\partial x_i\partial t = 0.$$

Insgesamt folgt dann aus (10)

$$\text{rot }\underline{E'} = -\partial\underline{B}/\partial t + \underline{v}\text{ div }\underline{B}.$$

Dies ist die erste Maxwellsche Gleichung. Auf dieselbe Weise erhält man durch Anwendung des rot-Operators auf (3b) die zweite Maxwellsche Gleichung

$$\text{rot }\underline{B'} = \partial\underline{E}/\partial t - \underline{v}\text{ div }\underline{E}.$$

Die Maxwell-Theorie (in der Feld-Formulierung, also ohne Ladungen) ergibt sich also als Spezialfall des allgemeineren Axioms 1. Gemeinhin wird der Term div $\underline{B}$ als null angenommen, da es keine magnetischen Ladungsträger gibt, die als Quellen des magnetischen Feldes auftreten. Die Maxwell-Beziehung

$$\rho = \text{div }\underline{D},$$

über welche die elektrische Ladungsdichte als Feldquelle eingeführt wird, diskutieren wir weiter unten. Wir schreiben das Ergebnis noch einmal hin:

Folgerung 3. Für den Fall konstanter Relativgeschwindigkeit oder vernachlässigbarer Ortsabhängigkeit der Geschwindigkeit gegenüber der Zeitabhängigkeit gelten die Maxwellschen „reinen“ Feldgleichungen

$$\text{rot }\underline{E'} = -\partial\underline{B}/\partial t + \underline{v}\text{ div }\underline{B}, \qquad (11a)$$

$$\text{rot }\underline{B'} = 1/c^2\,(\partial\underline{E}/\partial t - \underline{v}\text{ div }\underline{E}). \qquad (11b)$$

Die Gleichungen (11a,b) folgen aus (3a,b), aber die Ableitung enthält keine Äuivalenz-Umformungen; daher sind die Lösungsmannigfaltigkeiten beider Gleichungen verschieden. Aufgrund der Anwendung von Differentialoperatoren gehen Effekte verloren, die sich auf konstante Felder beziehen. So ist der in 2.1 genannte Faraday-Generator nicht durch diese Gleichungen beschreibbar, wohl aber durch die ursprünglichen.

Nach wie vor handelt es sich auf der linken Seite der Gleichungen um Zusatzfelder, die aufgrund einer Relativbewegung gegenüber den originalen Feldern induziert werden. Zusätzlich ruft eine rein zeitliche Veränderung der Originalfelder $\underline{E}$, $\underline{B}$ bereits ein Zusatzfeld hervor, das unabhängig vom Bewegungszustand ist. Dies gilt sogar für v=0, ein Fall, der in den ursprünglichen Gleichungen (3a,b) keinen Sinn macht. In diesem Falle sind die gestrichenen und ungestrichenen Felder identisch, und die Gleichungen (11a,b) können als Bestimmungsgleichungen der Felder hergenommen werden. Dies unterscheidet sich von der in Folgerung 2 aufgestellten Forderung, wo sich ein solches Verhalten nur für den Fall v=c definieren ließ.

3.2 Übergang zur makroskopischen Theorie

Wir haben bislang eine reine Feldtheorie betrachtet und wollen jetzt den Zusammenhang mit der klassischen Elektrodynamik herstellen.

3.2.1 Einführung höherer Abstraktionsebenen

Die Gl. (11a,b) sind reine Feldgleichungen, d.h. es treten keine Teilchen auf. In der klassischen Elektrodynamik geht man aber davon aus, daß Ladungen, also Teilchen, die Quellen des Feldes sind, und macht die Ersetzungen

elektr. Ladungsdichte $\rho = \text{div } \underline{D}$,

elektr. Stromdichte $\underline{j} = -\rho\underline{v}$,

magn. Ladungsdichte $\text{div } \underline{B} = 0$.

Das Minuszeichen in der Stromdichte bringt den obengenannten Wechsel des Bezugssystems zum Ausdruck. Rückwirkungseffekte werden vernachlässigt, denn die Elektronengeschwindigkeit beim elektrischen Strom ist so gering, daß man darauf verzichten kann. Es ergeben sich dann die

Maxwellschen Gleichungen im gemischten Feld-Teilchen-Bild:

$$\text{rot } \underline{E} = -\partial\underline{B}/\partial t, \qquad (12a)$$

$$\text{rot } \underline{B} = 1/c^2\ \partial\underline{E}/\partial t + \mu_0\ \underline{j}, \qquad (12b)$$

mit den Quellengleichungen

$$\text{div } \underline{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad (12c)$$

$$\text{div } \underline{B} = 0. \qquad (12d)$$

Dabei wird eine Feldrückwirkung vernachlässigt, $\underline{j}$ wird als rückwirkungsfreie Quelle des elektrischen Feldes angesehen. Magnetfelder sind per Definition quellenfrei und treten daher nur als Wirbelfelder mit geschlossenen Feldlinien auf.

Eine weitere Abstraktionsstufe der Betrachtung wird erreicht, wenn man stationäre elektrische Ströme einführt, die proportional zum elektrischen Feld sind. Es gilt dann das *Ohmsche Gesetz*

$$\underline{j} = \sigma\ \underline{E},$$

wobei die elektrische Leitfähigkeit σ als Proportionalitätsfaktor eingeführt wird.

3.2.2 Veranschaulichung des Übergangs

Da wir eine teilchenfreie Feldtheorie entwickelt haben, müssen wir davon ausgehen, daß dies eine mikroskopische Betrachtungsweise ist, denn die makroskopische Elektrodynamik setzt in ihrem elektrischen Teil weitgehend Ladungen als Feldquellen voraus. Die fundamentale Frage ist also, wie aus Wellen Ladungen oder Ströme entstehen können. Hierzu sind die Feldwirbel in der Lage, die wir in Abschnitt 4 diskutieren werden. Man kann sich dies anschaulich etwa in folgender Form vorstellen.

Eine elektromagnetische Welle, die sich schraubenförmig auf einer Spiralbahn bewegt, also eine wirbelähnliche Bewegung vollführt, hat eine Geschwindigkeitskomponente in der Tangentialrichtung der Kreisbewegung (v_t) und eine senkrecht dazu (v_s), s. Abb. 3. Die Welle bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit ($|\underline{v}|$=c), die Komponente der „Vortriebsgeschwindigkeit" v_s ist aber nur sehr klein. Da nur diese makroskopisch in Erscheinung tritt, bewegt sich die Wirbelstruktur sehr langsam. Nur v_s tritt z.B. in der Stromdichte in Erscheinung.

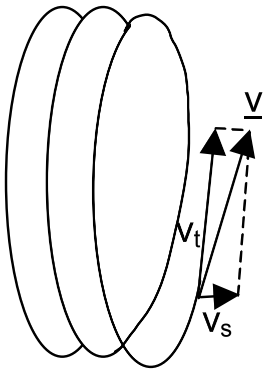


Abbildung 3: Bewegung einer Welle mit Wirbelüberlagerung

Da die makroskopische Geschwindigkeit mit der mikroskopischen nichts zu tun hat, gewinnt man sozusagen einen Freiheitsgrad, die Stromdichte kann als unabhängige Größe (unter Vernachlässigung der Feldrückwirkung) definiert werden, und die Gleichungen (12a,b) sind (etwa im Gegensatz zu 9a,b) wirklich voneinander unabhängig.

3.3 Diskussion der Potentialstromdichte

Die Faradaygleichungen (3a,b) sind experimentell bestätigt. Man sollte also annehmen, daß die daraus hergeleiteten Feldgleichungen (11a,b) genau in dieser Form gültig sind. Dann muß aber auch der Term div $\underline{B}$ eine physikalische Bedeutung haben. Man sollte sich klarmachen, daß wir hier eine reine Feldtheorie diskutieren und nicht die Gl. (12a,b) der gemischten Feld-Teilchen-Theorie. Es ist daher nicht von vornherein auszuschließen, daß es Feldkonstellationen mit div B $\neq$ 0 gibt, die im Teilchenbild keine Entsprechung haben.

Der Term $\underline{v}$ div $\underline{B}$ hat die physikalischen Einheiten m/s * Vs/m^3 = Vs/m^{2}s. Dies steht in Korrespondenz zur elektrischen Stromdichteeinheit A/m^2 = As/m^{2}s. Es handelt sich also formal um ein Spannung-Zeit-Produkt, das pro Sekunde durch eine Flächeneinheit hindurchfließt. Wir wollen es als *Potentialstromdichte* bezeichnen. Die Interpretation als Spannung pro Flächenelement wäre auch denkbar, berücksichtigt aber nicht die Tatsache, daß eine Geschwindigkeit, also eine Strömung, in die Definition eingeht. Wir definieren also

$$\underline{b} = - \underline{v} \text{ div } \underline{B}$$

als *Potentialstromdichte*. Damit nehmen die Gl. (12a,b) wieder eine symmetrische Form an:

$$\text{rot } \underline{E} = -\partial\underline{B}/\partial t - \underline{b}, \qquad (13a)$$

$$\text{rot } \underline{B} = 1/c^2\, \partial\underline{E}/\partial t + \mu_0\, \underline{j}, \qquad (13b)$$

$$\text{div } \underline{E} = \rho/\varepsilon_0,$$

$$\text{div } \underline{B} \neq 0.$$

Die Potentialstromdichte stellt also eine Quelle des elektrischen Feldes dar, die - analog zu einem Strom für das Magnetfeld – ringförmige geschlossene E-Feld-Linien hervorruft.

Man gewinnt eine weitere Interpretation, wenn man auf beide Gleichungen den Satz von Stokes anwendet. Die Integration von (13a) über eine beliebige Fläche S kann überführt werden in ein geschlossenens Linienintegral über den Rand C dieser Fläche:

$$\int_S (d\underline{S} \times \mathrm{rot}) \cdot \underline{E} = \int_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = -\partial/\partial t \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} - \int_S \underline{b} \cdot d\underline{S}$$

Die längs des geschlossenen Weges C induzierte Ringspannung ist also gleich der negativen zeitlichen Änderung der magnetischen Flußdichte Φ, vermehrt um die von der Potentialstromdichte induzierte Spannung U_b:

$$U_{ring} = -\partial\Phi/\partial t - U_b.$$

Dies ist das bekannte *Induktionsgesetz* mit dem zusätzlichen Term $-U_b$. Es hat damit eine duale Form des aus (13b) folgenden *Durchflutungsgesetzes*:

$$\int_C \underline{B} \cdot d\underline{r} = 1/c^2\, \partial/\partial t \int_S \underline{E} \cdot d\underline{S} + \mu_0 \int_S \underline{j} \cdot d\underline{S}$$

Das Induktionsgesetz in der hier abgeleiteten Form besagt, daß auch bei Abwesenheit eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes eine Ringspannung induziert wird, wenn durch die Leiterschleife ein Magnetfeld hindurchströmt, dessen Divergenz nicht verschwindet. Dies könnte ein Ansatz zum experimentellen Nachweis dieser Gleichung sein. Bei magnetischen Dipolfeldern ist aber div $\underline{B} = 0$. Sie sind daher zum Nachweis der Potentialstromdichte ungeeignet. Man muß vielleicht auf Wirbelfelder zurückgreifen, die in Abschnitt 4 eingeführt werden. Eine mögliche Versuchsanordnung könnte z.B. darin bestehen, Skalarwellen (d.h. longitudinale elektromagnetische Wellen im Sinne von Meyl [1]) durch eine Spule zu senden und diese auf eine induzierte Spannung zu prüfen.

3.4 Energiebilanz

Um einen Ausdruck für die Energiedichte des Feldes zu erhalten, multiplizieren wir (11a,b) skalar mit $\underline{B}$ und $\underline{E}$. Dies ist auch die Vorgehensweise in der klassischen Elektrodynamik. Wir wechseln dabei in das ruhende Bezugssystem und müssen wieder das Vorzeichen von $\underline{v}$ umdrehen. Außerdem setzen wir $\underline{E}=\underline{E}'$, $\underline{B}=\underline{B}'$, d.h. $\underline{v}$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen.

$$\underline{B} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{E} = -\underline{B} \cdot \partial\underline{B}/\partial t - \underline{B} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{B},$$

$$\underline{E} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{B} = 1/c^2\, \underline{E} \cdot \partial\underline{E}/\partial t + 1/c^2\, \underline{E} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{E}.$$

Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\underline{B} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{E} - \underline{E} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{B} = -\underline{B} \cdot \partial\underline{B}/\partial t - 1/c^2\, \underline{E} \cdot \partial\underline{E}/\partial t - \underline{B} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{B} - 1/c^2\, \underline{E} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{E}.$$

Mit (A12) fassen wir die linke Seite zusammen. Auf der rechten Seite formen wir die Zeitableitungen um:

$$\mathrm{div}\, (\underline{E} \times \underline{B}) = -\tfrac{1}{2}\, \partial\underline{B}^2/\partial t - \varepsilon_0 \mu_0 \tfrac{1}{2}\, \partial\underline{E}^2/\partial t - \underline{B} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{B} - \varepsilon_0 \mu_0\, \underline{E} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{E}. \qquad (14)$$

Wir definieren als Vektor der Energiestromdichte (*Poynting-Vektor*)

$$\underline{S} = 1/\mu_0\, \underline{E} \times \underline{B} \qquad (15)$$

und als Energiedichte

$$w = \varepsilon_0/2\, \underline{E}^2 + 1/2\mu_0\, \underline{B}^2. \qquad (16)$$

Damit ergibt sich aus (14)

$$\mathrm{div}\, \underline{S} = -\partial w/\partial t - \varepsilon_0\, \underline{E} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{E} - 1/\mu_0\, \underline{B} \cdot \underline{v}\, \mathrm{div}\, \underline{B}$$

oder für die Abnahme der Energiedichte:

$$- \partial w/\partial t = \text{div}\ \underline{S} + \varepsilon_0\ \underline{E} \cdot \underline{v}\ \text{div}\ \underline{E} + 1/\mu_0\ \underline{B} \cdot \underline{v}\ \text{div}\ \underline{B}. \qquad (17a)$$

bzw. mit den Stromdichten als Abkürzung:

$$- \partial w/\partial t = \text{div}\ \underline{S} + \varepsilon_0\ \underline{j} \cdot \underline{E} + 1/\mu_0\ \underline{b} \cdot \underline{B} \qquad (17b)$$

Gl. (17a,b) besagt, daß die wegströmende Energie vom Feld kommt (Poynting-Vektor) oder von/zu den Quellen/Senken strömt (Stromdichten).

3.5 Impulsbilanz

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für den Impuls des Feldes herleiten. Dazu bilden wir das Kreuzprodukt von (11a,b) mit $\underline{B}$ und $\underline{E}$. Wir wechseln dabei wieder in das ruhende Bezugssystem und drehen das Vorzeichen von $\underline{v}$ um.

$$\underline{E} \times \text{rot}\ \underline{E} = - \underline{E} \times \partial \underline{B}/\partial t - \underline{E} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{B},$$

$$\underline{B} \times \text{rot}\ \underline{B} = 1/c^2\ \underline{B} \times \partial \underline{E}/\partial t + 1/c^2\ \underline{B} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{E}.$$

Mit (A15) folgt

$$\tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{E}^2 - (\underline{E}\ \text{grad})\ \underline{E} = - \underline{E} \times \partial \underline{B}/\partial t - \underline{E} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{B},$$

$$c^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{B}^2 - c^2\ (\underline{B}\ \text{grad})\ \underline{B} = \underline{B} \times \partial \underline{E}/\partial t + \underline{B} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{E}.$$

Addition beider Gleichungen und Zusammenfassen der Zeitableitungen liefert

$$\tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{E}^2 + c^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{B}^2 - (\underline{E}\ \text{grad})\ \underline{E} - c^2\ (\underline{B}\ \text{grad})\ \underline{B} =$$
$$-\partial\ (\underline{E} \times \underline{B})/\partial t - \underline{E} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{B} + \underline{B} \times \underline{v}\ \text{div}\ \underline{E},$$

$$\varepsilon_0\ \partial\ (\underline{E} \times \underline{B})/\partial t =$$
$$- \varepsilon_0\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{E}^2 - 1/\mu_0\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{B}^2 + \varepsilon_0\ (\underline{E}\ \text{grad})\ \underline{E} + 1/\mu_0\ (\underline{B}\ \text{grad})\ \underline{B}$$
$$+ \varepsilon_0\ \underline{v} \times \underline{E}\ \text{div}\ \underline{B} - \varepsilon_0\ \underline{v} \times \underline{B}\ \text{div}\ \underline{E}.$$

Wir setzen nun die Faraday-Gleichungen (3a,b) ein, wieder mit umgekehrtem Vorzeichen von $\underline{v}$:

$$\varepsilon_0\ \partial\ (\underline{E} \times \underline{B})/\partial t =$$
$$- \varepsilon_0\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{E}^2 - 1/\mu_0\ \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{B}^2 + \varepsilon_0\ (\underline{E}\ \text{grad})\ \underline{E} + 1/\mu_0\ (\underline{B}\ \text{grad})\ \underline{B}$$
$$+ \varepsilon_0\ \underline{E}\ \text{div}\ \underline{E} + 1/\mu_0\ \underline{B}\ \text{div}\ \underline{B},$$

$$\varepsilon_0\ \partial\ (\underline{E} \times \underline{B})/\partial t =$$
$$\varepsilon_0\ (\underline{E}\ \text{div}\ \underline{E} + (\underline{E}\ \text{grad})\ \underline{E} - \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{E}^2) +$$
$$1/\mu_0\ (\underline{B}\ \text{div}\ \underline{B} + (\underline{B}\ \text{grad})\ \underline{B} - \tfrac{1}{2}\ \text{grad}\ \underline{B}^2).$$

Die rechte Seite kann als negative Divergenz des sog. *Maxwellschen Spannungstensors* geschrieben werden:

$$\varepsilon_0\ \partial\ (\underline{E} \times \underline{B})/\partial t = - \text{Div}\ \mathbf{T}. \qquad (18)$$

Vergleich mit der Mechanik

Das Ziel unserer Überlegungen ist eine Art „Bewegungsgleichung“ für elektromagnetische Felder. Wir ziehen daher einen Vergleich der Impulsbilanz mit der klassischen Mechanik.

In der Mechanik ist eine Impulsdichte gleich einer Massenstromdichte $\underline{g}_m$, und es gilt die Bewegungsgleichung der Kontinuumsmechanik

$$\partial \underline{g}_m/\partial t = - \text{Div}\ \mathbf{T_m} + \underline{f}, \qquad (19)$$

wobei $\mathbf{T_m}$ der Spannungstensor und $\underline{f}$ die äußere Kraftdichte ist. Die Massenstromdichte $\underline{g}_m$ ist über das Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalent mit einer Energiestromdichte $\underline{S}_m$ verknüpft:

$$\underline{g}_m = \underline{S}_m/c^2.$$

Damit können wir für den Elektromagnetismus eine analoge Definition verwenden. Wir definieren die Größe

$$\underline{g} = \varepsilon_0\, \underline{E} \times \underline{B} \qquad (20)$$

als *Impulsdichte* des elektromagnetischen Feldes. Für das elektromagnetische Feld gilt analog mit der Energiestromdichte $\underline{S}$ (Gl. 15):

$$\underline{g} = \underline{S}/c^2$$

Damit folgt aus (18):

$$\boxed{\begin{aligned}\partial \underline{g}/\partial t = - \mathrm{Div}\, \mathbf{T} = \varepsilon_0 (\underline{E}\, \mathrm{div}\, \underline{E} + (\underline{E}\, \mathrm{grad})\, \underline{E} - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{grad}\, \underline{E}^2) + \qquad (21)\\ 1/\mu_0 (\underline{B}\, \mathrm{div}\, \underline{B} + (\underline{B}\, \mathrm{grad})\, \underline{B} - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{grad}\, \underline{B}^2).\end{aligned}}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck für die zeitliche Änderung des Feldimpulses.

4 Die Wirbelgleichungen

4.1 Klassifikation von Wirbeleffekten

Wenn wir im Zusammenhang mit der Elektrodynamik von Wirbeln sprechen, müssen wir genauer spezifizieren, welche Art Wirbel wir meinen. Im Falle rot $\underline{E} \neq 0$ oder rot $\underline{B} \neq 0$ sprechen wir von *Feldwirbeln*. Diese werden mit der Maxwellschen Theorie erfaßt. Wir wollen aber jetzt die Näherung, unter der die Maxwellschen Gleichungen hergeleitet wurden, wieder aufgeben. Das Geschwindigkeitsfeld kann also beliebige Formen annehmen, insbesondere solche mit rot $\underline{v} \neq 0$. Wir sprechen dann von *Bewegungswirbeln* (Abb. 4). Aus den Faraday-Gleichungen folgt, daß auch in diesem Fall die Vektoren $\underline{E}$, $\underline{B}$ und $\underline{v}$ jeweils aufeinander senkrecht stehen.

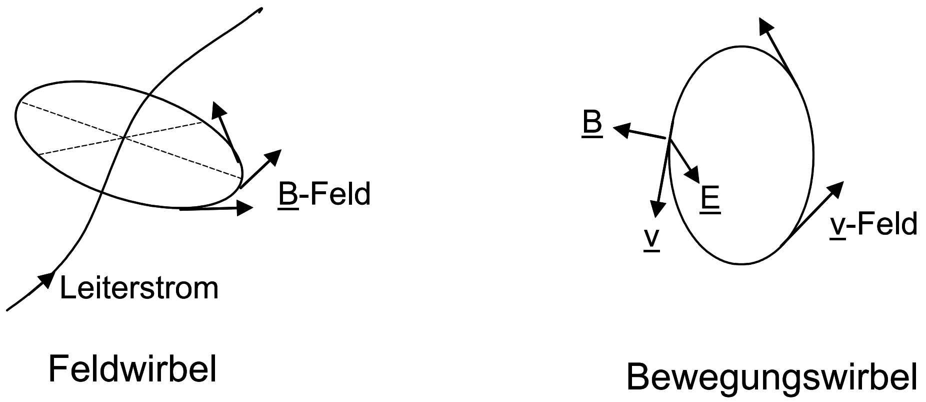


Abbildung 4. Wirbeldefinitionen

4.2 Herleitung der Wirbelgleichungen

Wir geben nun die in Abschnitt 3 gemachte Näherung für die Geschwindigkeit auf und wenden uns wieder den originalen Gleichungen (3a,b) zu. Das Auftreten des Vektorprodukts läßt vermuten, daß hiermit bereits Wirbeleffekte beschreibbar sind. Wir bilden von Gl. (3a) die Divergenz und formen nach (A12) um. Es ergibt sich:

$$\mathrm{div}\, \underline{E}' = \mathrm{div}\, (\underline{v} \times \underline{B}) = \underline{B}\, \mathrm{rot}\, \underline{v} - \underline{v}\, \mathrm{rot}\, \underline{B}.$$

Dies ist in der Tat eine Wirbelgleichung. Zusammen mit (3b) erhalten wir das Gleichungspaar der

Wirbelgleichungen:

$$\mathrm{div}\,\underline{E}' = \underline{B}\,\mathrm{rot}\,\underline{v} - \underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}, \tag{22a}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{B}' = 1/c^2\,(-\,\underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{v} + \underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{E}). \tag{22b}$$

Aus diesen Gleichungen folgen genau die Aussagen, die K. Meyl in [2] über Bewegunswirbel in einer mikroskopischen Feldtheorie gemacht hat. Während Meyl teilweise auf qualitative Argumente zurückgreift, können wir hier die sich ergebenden Effekte aus den Wirbelgleichungen direkt folgern:

1. Wirbel sind die Quellen des Feldes. Insbesondere sind keine elektrischen Elementarladungen erforderlich.
2. Die Divergenz des B-Feldes hat eine physikalische Bedeutung, im Gegensatz zu den Annahmen der Maxwelltheorie.
3. Im allgemeinen ist weder das E-Feld rotationsfrei, noch ist das B-Feld quellenfrei.
4. Im Falle der Voraussetzungen der Maxwelltheorie ($\underline{v}$ räumlich konstant, d.h. rot $\underline{v}$ = 0) stellen elektrische Feldwirbel eine Quelle des Magnetfeldes dar. Das sind die Potentialwirbel, die nach Meyl zur Ausbildung von Skalarwellen führen.
5. Aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens des rot $\underline{v}$–Terms in beiden Gleichungen ist die Wirkung der Bewegungswirbel verschieden: Eine Erhöhung der Wirbelstärke führt (im mitbewegten System) zu einer Erhöhung der elektrischen Quellstärke, aber zu einer entsprechend größeren magnetischen Senkenwirkung.
6. Es ist zu erwarten, daß im mikroskopischen Bereich der Term rot $\underline{v}$ gegenüber dem jeweils anderen überwiegt, da hier die Abmessungen klein sind und die Beschleunigung, die auf ein elementares Feldvolumen wirkt, sehr groß ist.

4.3 Einführung der Näherung $\underline{v} \approx$ const.

Wie bei der Herleitung der Maxwellschen Gleichungen können wir den Sonderfall $\underline{v} \approx$ const. betrachten, der den Übergang zur klassischen Elektrodynamik darstellt. Die Wirbelgleichungen (22a,b) vereinfachen sich dann zu

$$\mathrm{div}\,\underline{E}' = -\,\underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{B}' = 1/c^2\,\underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{E}$$

Andererseits gelten unter diesen Umständen die Maxwellschen Gleichungen (11a,b), die durch Rotationsbildung mit den Faraday-Gleichungen entstanden waren. Konsequenterweise muß man anstatt der Maxwellschen Postulate (12c,d) für die Divergenzterme die hier abgeleiteten Ausdrücke verwenden. Es ergibt sich dann ein Satz Gleichungen, den wir als *alternative Maxwellsche Gleichungen* bezeichnen wollen:

Alternative Maxwellsche Gleichungen:

$$\mathrm{rot}\,\underline{E}' = -\partial\underline{B}/\partial t + \underline{v}\,\mathrm{div}\,\underline{B}, \tag{23a}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{B}' = 1/c^2\,(\partial\underline{E}/\partial t - \underline{v}\,\mathrm{div}\,\underline{E}), \tag{23b}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{E}' = -\,\underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}, \tag{23c}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{B}' = 1/c^2\,\underline{v}\,\mathrm{rot}\,\underline{E}. \tag{23d}$$

Es ist jetzt die volle Dualität sowohl in den Rotations- als auch in den Divergenz-Termen gegeben. Man könnte diese Gleichungen auch als *linearisierte Faraday-Gleichungen* bezeichnen, da sie in den Feldern linear sind ($\underline{v}$ ist nach Voraussetzung konstant).

Wir wollen wieder in das ruhende Bezugssystem wechseln. Dann können wir die Divergenz-Terme (23c,d) in die Gleichungen (23a,b) einsetzen und erhalten nach Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Größen in (23c,d):

$$\text{rot } \underline{E}' = -\partial\underline{B}/\partial t + 1/c^2\, \underline{v} \cdot (\underline{v} \text{ rot } \underline{E}'),$$

$$\text{rot } \underline{B}' = 1/c^2\, (\partial\underline{E}/\partial t + \underline{v} \cdot (\underline{v} \text{ rot } \underline{B}')).$$

Im Falle, daß $\underline{v}$ parallel zu rot $\underline{E}$ ist, vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\text{rot } \underline{E}' = -\partial\underline{B}/\partial t + v^2/c^2 \text{ rot } \underline{E}',$$

$$\text{rot } \underline{B}' = 1/c^2\, \partial\underline{E}/\partial t + v^2/c^2 \text{ rot } \underline{B}'.$$

oder

$$\text{rot } \underline{E}' (1 - v^2/c^2) = -\partial\underline{B}/\partial t,$$

$$\text{rot } \underline{B}' (1 - v^2/c^2) = 1/c^2\, \partial\underline{E}/\partial t.$$

Es ergibt sich also für diesen Spezialfall die Lorentztransformation, wie wir es auch schon in Abschnitt 2.3 für die Faraday-Gleichungen kennengelernt haben. Im Falle v=0 (d.h. die Felder haben gleiche Relativgeschwindigkeit) gehen die gestrichenen Größen in die ungestrichenen über, und es ergeben sich die bekannten Gleichungen des elektromagnetischen Feldes im Vakuum.

4.4 Energiebilanz aus den Faraday-Gleichungen

Um einen Ausdruck für die Energiedichte des Feldes ohne die Näherung $v \approx$const. zu erhalten, gehen wir analog zu Abschnitt 3.4 vor. Wir bilden dir Rotation von (3a,b) und multiplizieren skalar mit $\underline{B}$ und $\underline{E}$. Wir wechseln dabei in das ruhende Bezugssystem und setzen $\underline{E}$=$\underline{E}$‘, $\underline{B}$=$\underline{B}$‘, was wir hier für die Faradaygleichungen tun dürfen, da wir die Wellenausbreitung betrachten. Mit (A11) ergibt sich:

$$\underline{B} \cdot \text{rot } \underline{E} = -\underline{B} \cdot \text{rot } (\underline{v} \times \underline{B}) = -\underline{B} \cdot (\underline{B} \text{ grad*}) \underline{v} + \underline{B} \cdot (\underline{v} \text{ grad*}) \underline{B} - \underline{B} \cdot \underline{v} \text{ div } \underline{B} + \underline{B} \cdot \underline{B} \text{ div } \underline{v}, \qquad (24a)$$

$$\underline{E} \cdot \text{rot } \underline{B} = 1/c^2\, \underline{E} \cdot \text{rot } (\underline{v} \times \underline{E}) = 1/c^2\, [\, \underline{E} \cdot (\underline{E} \text{ grad*}) \underline{v} - \underline{E} \cdot (\underline{v} \text{ grad*}) \underline{E} + \underline{E} \cdot \underline{v} \text{ div } \underline{E} - \underline{E} \cdot \underline{E} \text{ div } \underline{v}\,]. \qquad (24b)$$

Die j-te Komponente des Terme mit dem Operator grad* können wir umrechnen nach

$$(\, (\underline{v} \text{ grad*})\, \underline{B}\,)_j = v_j\, \partial B_j/\partial x_j = v_j\, \partial B_j/\partial t\; \partial t/\partial x_j = v_j/v_j^p\, \partial B_j/\partial t$$

mit der partiellen Ableitung

$$v_j^p = \partial x_j/\partial t. \qquad (25)$$

Daraus folgt

$$\underline{B}\, (\underline{v} \text{ grad*})\, \underline{B} = \Sigma_j\, B_j\, v_j/v_j^p\, \partial B_j/\partial t = ½\, \Sigma_j\, v_j/v_j^p\, \partial B_j^2/\partial t = ½\, \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\, (\mathbf{B}\, \underline{B}).$$

Dabei hat der Vektor $\underline{e}_v$ die Komponenten v_j/v_j^p. Das ist das Verhältnis der totalen Ableitung dx_j/dt zur partiellen $\partial x_j/\partial t$. Es beschreibt die relative Stärke des Konvektionsterms in der Geschwindigkeit. **B** ist eine Diagonalmatrix mit den Elementen B_j, also:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_v = (\, v_1/v_1^p,\, v_2/v_2^p,\, v_3/v_3^p\,).$$

Das Analoge gilt für den Term $\underline{E}$ ($\underline{v}$ grad*) $\underline{E}$. Subtraktion beider Gleichungen (24a,b) liefert

$$\underline{B} \cdot \text{rot } \underline{E} - \underline{E} \cdot \text{rot } \underline{B} =$$

$$
\begin{aligned}
&- \underline{B} \cdot (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - 1/c^2\ \underline{E} \cdot (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} \\
&+ \tfrac{1}{2}\ \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\ (\mathbf{B}\ \underline{B}) + 1/c^2\ \tfrac{1}{2}\ \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\ (\mathbf{E}\ \underline{E}) \\
&- \underline{B} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{B} - 1/c^2\ \underline{E} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{E} \\
&+ \underline{B} \cdot \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{v} + 1/c^2\ \underline{E} \cdot \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{v} \\
&= \\
&- \underline{B} \cdot (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - 1/c^2\ \underline{E} \cdot (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} \\
&+ \tfrac{1}{2}\ \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\ (\mathbf{B}\ \underline{B} + 1/c^2\ \mathbf{E}\ \underline{E}) \\
&- \underline{B} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{B} - 1/c^2\ \underline{E} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{E} \\
&+ (\underline{B}^2 + 1/c^2\ \underline{E}^2)\ \mathrm{div}\ \underline{v}.
\end{aligned}
$$

Mit (A12) fassen wir die linke Seite zusammen. Mit Definition des Poynting-Vektors (20) gilt dann:

$$\underline{B} \cdot \mathrm{rot}\ \underline{E} - \underline{E} \cdot \mathrm{rot}\ \underline{B} = \mathrm{div}\ (\underline{E} \times \underline{B}) = \mu_0\ \mathrm{div}\ \underline{S}.$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \underline{S} = &- 1/\mu_0\ \underline{B} \cdot (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - \varepsilon_0\ \underline{E} \cdot (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} \\
&+ \tfrac{1}{2}\ \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\ (\varepsilon_0\ \mathbf{E}\ \underline{E} + 1/\mu_0\ \mathbf{B}\ \underline{B}) \\
&- 1/\mu_0\ \underline{B} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{B} - \varepsilon_0\ \underline{E} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{E} \\
&+ (1/\mu_0\ \underline{B}^2 + \varepsilon_0\ \underline{E}^2)\ \mathrm{div}\ \underline{v}.
\end{aligned}
$$

Wir schreiben diesen Ausdruck noch einmal um, so daß die Zeitableitung auf der linken Seite steht. Diese interpretieren wir als Ableitung der Energiedichte. Sie hat jetzt nicht mehr die einfache Form (17a) wie im Maxwellschen Fall, und es steht noch der Faktor $\underline{e}_v$ davor.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
- \tfrac{1}{2}\ \underline{e}_v \cdot \partial/\partial t\ (\varepsilon_0\ \mathbf{E}\ \underline{E} + 1/\mu_0\ \mathbf{B}\ \underline{B}) = &- \mathrm{div}\ \underline{S} \\
&+ 1/\mu_0\ \underline{B} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{B} - \varepsilon_0\ \underline{E} \cdot \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{E} \\
&- 1/\mu_0\ \underline{B} \cdot (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - \varepsilon_0\ \underline{E} \cdot (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} \\
&+ (1/\mu_0\ \underline{B}^2 + \varepsilon_0\ \underline{E}^2)\ \mathrm{div}\ \underline{v}
\end{aligned}
} \tag{26}
$$

Die ersten 3 Terme auf der rechten Seite entsprechen der Maxwellschen Energiefluß, der Rest sind geschwindigkeitsabhängige Zusatzterme. Im letzten Term taucht die Maxwellsche Energiedichte als Vorfaktor von div $\underline{v}$ noch einmal auf.

4.5 Impulsbilanz aus den Faraday-Gleichungen

Wir wollen jetzt noch analog zu Abschnitt 3.5 einen Ausdruck für den Feldimpuls herleiten, wie er sich unter Einschluß der Geschwindigkeitsterme ergibt. Dazu bilden wir wieder das Kreuzprodukt von (3a,b) mit $\underline{B}$ und $\underline{E}$. Wir wechseln dabei wieder in das ruhende Bezugssystem (d.h. wir drehen das Vorzeichen von $\underline{v}$ um).

$$\underline{E} \times \mathrm{rot}\ \underline{E} = - \underline{E} \times \mathrm{rot}\ (\underline{v} \times \underline{B}),$$

$$\underline{B} \times \mathrm{rot}\ \underline{B} = 1/c^2\ \underline{B} \times \mathrm{rot}\ (\underline{v} \times \underline{E}).$$

Die linken Seiten formen wir mit (A15) um, die rechten mit (A11):

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\ \mathrm{grad}\ \underline{E}^2 - (\underline{E}\ \mathrm{grad})\ \underline{E} = \\
&\qquad - \underline{E} \times (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \underline{E} \times (\underline{v}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{B} - \underline{E} \times \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{B} + \underline{E} \times \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{v}, \\
&c^2\ \tfrac{1}{2}\ \mathrm{grad}\ \underline{B}^2 - c^2\ (\underline{B}\ \mathrm{grad})\ \underline{B} = \\
&\qquad \underline{B} \times (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - \underline{B} \times (\underline{v}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{E} + \underline{B} \times \underline{v}\ \mathrm{div}\ \underline{E} - \underline{B} \times \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{v}.
\end{aligned}
$$

Nach (24) und der dort angegebenen Rechnung war

$$((\underline{v}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{B}\ )_j = v_j/v_j^p\ \partial B_j/\partial t.$$

Mit der Definition der Matrix

$$\mathbf{e}_v = \begin{pmatrix} v_1/v_1^p & 0 & 0 \\ 0 & v_2/v_2^p & 0 \\ 0 & 0 & v_3/v_3^p \end{pmatrix}$$

können wir dann schreiben:

$$\underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{v}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{B} = \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t).$$

Insgesamt ergibt sich, wenn wir wieder (3a,b) (mit Vorzeichenwechsel) und (15) einsetzen:

$$\begin{aligned} &½\ \mathrm{grad}\ \underline{E}^2 - (\underline{E}\ \mathrm{grad})\ \underline{E} = \\ &\qquad - \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t) + c^2\ \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{B} + \mu_0\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v}, \\ &c^2\ ½\ \mathrm{grad}\ \underline{B}^2 - c^2\ (\underline{B}\ \mathrm{grad})\ \underline{B} = \\ &\qquad \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{E}/\partial t) + \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{E} + \mu_0\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v}. \end{aligned}$$

Addition beider Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} &½\ \mathrm{grad}\ \underline{E}^2 + c^2\ ½\ \mathrm{grad}\ \underline{B}^2 - (\underline{E}\ \mathrm{grad})\ \underline{E} - c^2\ (\underline{B}\ \mathrm{grad})\ \underline{B} = \\ &\qquad - \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t) + c^2\ \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{B} + \mu_0\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v} \\ &\qquad + \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} - \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{E}/\partial t) + \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{E} + \mu_0\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v}. \end{aligned}$$

Wir ordnen die Terme so um, daß die Zeitableitungen auf der linken Seite stehen:

$$\begin{aligned} &- \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t) + \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{E}/\partial t) = \\ &\qquad - ½\ \mathrm{grad}\ \underline{E}^2 - c^2\ ½\ \mathrm{grad}\ \underline{B}^2 + (\underline{E}\ \mathrm{grad})\ \underline{E} + c^2\ (\underline{B}\ \mathrm{grad})\ \underline{B} \\ &\qquad + c^2\ \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{B} + \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{E} \\ &\qquad - \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + 2\ \mu_0\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\boxed{\begin{aligned} &- \varepsilon_0\ \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t) + \varepsilon_0\ \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{E}/\partial t) = \\ &\qquad - \varepsilon_0/2\ \mathrm{grad}\ \underline{E}^2 - 1/2\mu_0\ \mathrm{grad}\ \underline{B}^2 + \varepsilon_0\ (\underline{E}\ \mathrm{grad})\ \underline{E} + 1/\mu_0\ (\underline{B}\ \mathrm{grad})\ \underline{B} \\ &\qquad + \varepsilon_0\ \underline{E}\ \mathrm{div}\ \underline{E} + 1/\mu_0\ \underline{B}\ \mathrm{div}\ \underline{B} \\ &\qquad - \varepsilon_0\ \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \varepsilon_0\ \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + 2/c^2\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v} \end{aligned}} \qquad (27)$$

Aus Vergleich mit dem Maxwell-Fall (21) folgt:

$$\begin{aligned} &- \varepsilon_0\ \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{B}/\partial t) + \varepsilon_0\ \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\mathbf{e}_v\ \partial\underline{E}/\partial t) = \\ &\qquad - \mathrm{div}\ \mathbf{T}_{\mathrm{Maxwell}} - \varepsilon_0\ \underline{E}\ \mathrm{x}\ (\underline{B}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + \varepsilon_0\ \underline{B}\ \mathrm{x}\ (\underline{E}\ \mathrm{grad}^*)\ \underline{v} + 2/c^2\ \underline{S}\ \mathrm{div}\ \underline{v} \end{aligned}$$

Es handelt sich also bei der linken Seite von (27) wieder um die Zeitableitung der Impulsdichte. Es treten drei geschwindigkeitsabhängige Zusatzterme auf, wie wir es auch für die Ableitung der Energiedichte (26) gefunden haben.

5 Die Feldgleichungen und deren Lösung

Wir zeigen jetzt, wie aus den aufgestellten Energie- und Impulsbilanzen ein Satz von Feldgleichungen analog zur Strömungsmechanik aufgestellt werden kann. Dadurch kommt der Wirbelcharakter des elektromagnetischen Feldes klar zum Ausdruck. Zum Vergleich mit dem Experiment müssen schließlich Lösungen der Gleichungen präsentiert werden. Dies ist weit schwieriger als das Aufstellen der Gleichungen selbst.

5.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Wir beginnen mit der Maxwellschen Theorie, da hier die Situation noch vergleichsweise übersichtlich ist. Da in dieser Theorie die Ströme und Ladungen als Feldquellen betrachtet werden, können diese als gegeben angesehen werden. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß hierbei eine Rückwirkung des Feldes auf die Quellen vernachlässigt wird. Es sind also Lösungen für die Felder $\underline{E}$, $\underline{B}$ aus (12a,b) zu finden. Dies sind 6 Gleichungen mit 6 Unbekannten, es handelt sich also um ein wohldefiniertes Problem, das linear in den Feldern ist. Die Lösungen werden allerdings durch die Quellen-Bedingungen (12c,d) eingeschränkt. Das magnetische Feld ist quellenfrei und das elektrische ist wirbelfrei. Daher können ein Vektorpotential $\underline{A}$ und ein skalares elektrisches Potential φ eingeführt werden, aus denen sich die Felder (bis auf eine sog. Eichung) ergeben:

$$\underline{E} = - \text{grad}\ \varphi,$$

$$\underline{B} = \text{rot}\ \underline{A}.$$

Effektiv brauchen daher nur 4 unbekannte Variablen berechnet zu werden, wie in jedem Lehrbuch über Elektrodynamik nachzulesen ist.

Es besteht aber auch die Möglichkeit, (12a,b) direkt zu lösen, was meistens numerisch mithilfe von Computern geschieht.

5.2 Vergleich mit der Strömungsmechanik

Wenn die hier dargestellte Theorie eine physikalische Relevanz haben soll, muß es möglich sein, Lösungen der Feldgleichungen (3a,b) oder (11a,b) zu berechnen. Wie bereits diskutiert, handelt es sich hierbei um reine Feldgleichungen ohne externe Quellterme. Das Feld wird sozusagen wieder selbst zur Quelle. Dessen Quellwirkung hängt von der Bewegungsgeschwindigkeit ab, die sich ebenfalls als Lösung ergeben muß. Es liegen also 9 Unbekannte vor, aber nur 6 Gleichungen. Ein Lösungsweg wird aus dem Vergleich mit der Strömungsmechanik klar.

In der Strömungsmechanik besteht die Aufgabe, eine Lösung für das Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}$ eines Gases oder einer Flüssigkeit zu finden. Gleichzeitig müssen dynamisch davon abhängige Größen wie der Druck oder die Temperatur bestimmt werden. Man geht von der Impulserhaltung aus. Dies entspricht Gl. (19), allerdings mit totaler Zeitableitung, da wir die Ortsabhängigkeit der Impulsdichte nicht mehr gegenüber der Zeitabhängigkeit vernachlässigen. Es gilt dann

$$d\underline{g}_m/dt = - \text{Div}\ \mathbf{T_m} + \underline{f}$$

oder analog zu (4):

$$\partial\underline{g}_m/\partial t + (\underline{v}\ \text{grad})\ \underline{g}_m = - \text{Div}\ \mathbf{T_m} + \underline{f}$$

mit einer externen Kraftdichte $\underline{f}$, was die Schwerkraft sein kann. In der Mechanik wird die Dichte meist als konstant angenommen, mit

$$\underline{g}_m = \underline{\rho}_m\ \underline{v}$$

gilt dann

$$\rho_m\ \partial\underline{v}/\partial t + \rho_m\ (\underline{v}\ \text{grad})\ \underline{v} = - \text{Div}\ \mathbf{T_m} + \underline{f} \qquad (28)$$

Dies ist im Prinzip die *Navier-Stokes-Gleichung*, wobei die genaue Form des Spannungstensors, der von der Geschwindigkeit abhängt, hier nicht ausgeführt worden ist. Der Gradienten-Term wird *Konvektions-Term* genannt.

Da die Navier-Stokes-Gleichung noch andere Unbekannte als $\underline{v}$ (mindestens den Druck p) enthält, reicht sie zur Bestimmung nicht aus. Es werden deshalb weitere Erhaltungssätze hinzugenommen. So beschreibt die Kontinuitätsgleichung die Massen-Erhaltung:

$$\partial\rho_m/\partial t + \text{div}\ (\rho_m\ \underline{v}) = 0 \qquad (29)$$

Im Falle des elektromagnetischen Feldes entspricht dies der Energieerhaltung (wegen des bereits erwähnten Masse-Energie-Äquivalents).

Mit (28) und (29) ist im Prinzip eine Lösung für die Variablen $\underline{v}$ und p möglich, wenn sie auch wegen der Nichtlinearitäten und schwierig zu formulierenden Randbedingungen nur für stark eingeschränkte Spezialfälle analytisch angebbar ist.

5.3 Die Maxwellschen Gleichungen mit reinem Feldanteil

Aus dem Vergleich mit der Strömungsmechanik wird klar, daß die Impulserhaltung der Schlüssel zur Lösung ist. Wir müssen also zu den Gleichungen (11a,b) die Bedingung

$$\partial \underline{g}/\partial t = 0$$

mit dem Ausdruck (21) für $\partial \underline{g}/\partial t$ hinzunehmen. Damit haben wir die benötigten 9 Gleichungen (im ruhenden Koordinatensystem):

$$\text{rot } \underline{E} = -\partial \underline{B}/\partial t - \underline{v} \text{ div } \underline{B},$$

$$\text{rot } \underline{B} = 1/c^2 \, (\partial \underline{E}/\partial t + \underline{v} \text{ div } \underline{E}),$$

$$\varepsilon_0 \, (\underline{E} \text{ div } \underline{E} + (\underline{E} \text{ grad}) \, \underline{E} - ½ \text{ grad } \underline{E}^2)$$

$$+ 1/\mu_0 \, (\underline{B} \text{ div } \underline{B} + (\underline{B} \text{ grad}) \, \underline{B} - ½ \text{ grad } \underline{B}^2) = 0.$$

Die Impulserhaltung führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem. Aus der Lösungsmenge müssen diejenigen Lösungen ausgesondert werden, die nicht den Nebenbedingungen (12d) oder (23c,d) genügen. Außerdem ist in diesem Fall $\underline{v}$=const. angenommen, d.h. $\underline{v}$ ist durch die Randbedingungen bereits vollständig bestimmt. Es macht also nur Sinn, die ersten beiden Gleichungen zu verwenden, die Impulserhaltung sollte aus physikalischen Gründen automatisch erfüllt sein. Wenn wir statt $\underline{v}$ echte Quellterme vorgeben ($\underline{j}$ und $\underline{b}$), sind wir bei einer erweiterten Maxwelltheorie angelangt. Es ist allerdings nicht klar, wie in sinnvoller Weise eine Potentialstromdichte vorzugeben ist.

5.4 Die Faraday-Gleichungen

Konsistentere Ergebnisse erhält man aus den Gleichungen (3a,b). Für den Ansatz mit der Impulsdichte gilt das vorher Gesagte entsprechend. Mit der zu Null gesetzten Änderung der Feldimpulsdichte (27) ist dann das Gleichungssystem

$$\underline{E} = - \underline{v} \times \underline{B},$$

$$\underline{B} = 1/c^2 \, \underline{v} \times \underline{E},$$

$$- \varepsilon_0/2 \text{ grad } \underline{E}^2 - 1/2\mu_0 \text{ grad } \underline{B}^2 + \varepsilon_0 \, (\underline{E} \text{ grad}) \, \underline{E} + 1/\mu_0 \, (\underline{B} \text{ grad}) \, \underline{B}$$

$$+ \varepsilon_0 \, \underline{E} \text{ div } \underline{E} + 1/\mu_0 \, \underline{B} \text{ div } \underline{B}$$

$$- \varepsilon_0 \, \underline{E} \times (\underline{B} \text{ grad*}) \, \underline{v} + \varepsilon_0 \, \underline{B} \times (\underline{E} \text{ grad*}) \, \underline{v} + 2/c^2 \, \underline{S} \text{ div } \underline{v} = 0$$

zu lösen. Dies ist noch viel komplexer als dasjenige für die Maxwellschen Gleichungen. Insbesondere kommen hier keine expliziten Zeitableitungen vor. Es gilt daher in dieser Form für den stationären Fall. Wir haben aber in der Herleitung nirgendwo zeitabhängige Vorgänge ausgeschlossen; es ist daher nicht klar, wie die Zeitintegration erfolgen soll. Man könnte die Definition für die Geschwindigkeit ($\underline{v} = d\underline{u}/dt$) verwenden und primär die Verrückungen $\underline{u}(\underline{x},t)$ berechnen, doch dann würden die Gleichungen noch wesentlich komplizierter aufgrund der dann explizit auftretenden Konvektionsterme. Günstiger wäre es, die erste oder zweite Gleichung noch einmal nach der Zeit abzuleiten:

$$d\underline{E}/dt = - d\underline{v}/dt \times \underline{B} - \underline{v} \times d\underline{B}/dt$$

$$= - (\partial \underline{v}/\partial t + (\underline{v} \text{ grad}) \, \underline{v}) \times \underline{B} - \underline{v} \times (\partial \underline{B}/\partial t + (\underline{v} \text{ grad}) \, \underline{B}).$$

Es tritt nun die Beschleunigung $d\underline{v}/dt$ explizit auf. An diesem Punkt beginnt die eigentliche Arbeit, die aber im Rahmen dieses Artikels nicht mehr angegangen werden kann.

5.4.1 Ein analytischer Ansatz

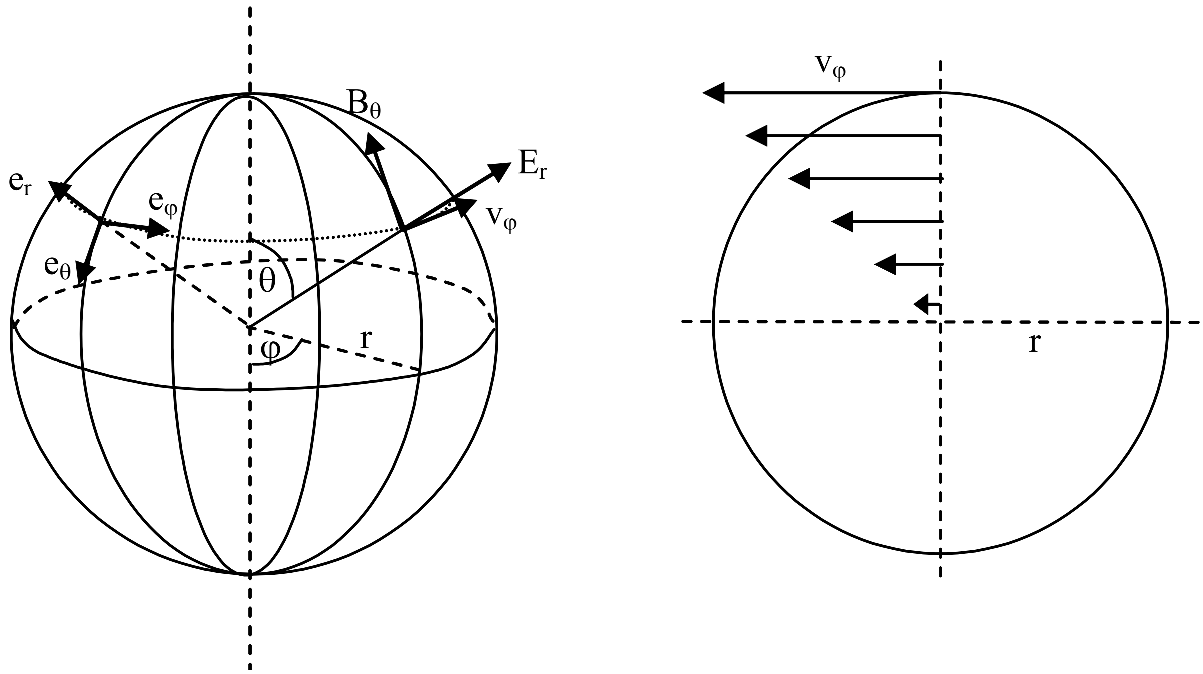
Eine vereinfachte Vorgehensweise besteht darin, zunächst eine plausible Geschwindigkeitsverteilung festzulegen und dazu die Felder zu berechnen. Dann genügen die Gleichungen (3a,b). Dies ist zwar kein allgemeiner Lösungsweg, er kann aber Einblicke in die Natur typischer Wirbellösungen vermitteln.

Wir nehmen ein kugelsymmetrisches Geschwindigkeitsfeld an. Dazu führen wir zweckmäßigerewise Kugelkoordinaten ein mit den Basisvektoren $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\varphi$ (Abb. 5a). Die Wirbelrichtung soll in West-Ost-Richtung verlaufen, der Geschwindigkeitsvektor hat also nur eine φ-Komponente. Das E-Feld soll nach außen zeigen, also in $\underline{e}_r$-Richtung liegen. Dann zeigt B_θ in die negative $\underline{e}_\theta$-Richtung.

Für die Geschwindigkeit nehmen wir eine r-Abhängigkeit an, denn es ist plausibel, daß sich die Wirbelrotation auf allen Radien mit gleicher Umlauffrequenz erfolgt. Dann muß aber die Tangentialgeschindigkeit von r abhängen in der Form

$$v_\varphi = \omega r.$$

mit der Rotationsfrequenz $\omega=2\pi/T$; T ist die Umlaufperiode. Dies gelte unabhängig vom Höhenwinkel θ.



a. Felder in Kugelkoordinaten Geschwindigkeits-Profil in der φ-Ebene

Abbildung 5: Feldstruktur in Kugelkoordinaten

Es ergibt sich damit das Geschwindigkeitsprofil, wie es in Abbildung 5b dargestellt ist. Nun gilt aber an allen Punkten des Raumes v=c. Dies ist nur mit unserem Ansatz vereinbar, wenn die Lichtgeschwindigkeit örtlich variiert. Wir erreichen dies durch eine spezielle Wahl von ε und μ. Wir definieren

$$\varepsilon := \varepsilon_0\, R/r, \qquad \mu := \mu_0\, R/r$$

mit dem Kugelradius R. Damit ist gewährleistet, daß c am Rand stetig in den Vakuumwert übergeht. Es ist somit:

$$c(r) = (\varepsilon\, \mu)^{-1/2} = (\varepsilon_0\, \mu_0)^{-1/2}\, r/R.$$

Wir können die Konstanten ε_0, μ_0 und R zu einer neuen Konstanten ω_0 zusammenfassen und erhalten wieder die oben definierte Form

$$v_\varphi = \omega_0 r.$$

ω_0 identifizieren wir mit ω. Dieser Ansatz entspricht der Vorgehensweise in der Physik, Vielteilcheneffekte auf ein effektives Einteilchenproblem zurückzuführen. Denn wir müssen von vielen Wellen ausgehen, die an einem Wirbel beteiligt sind. Diese werden nach kleineren Radien hin konzentriert sein, d.h. die Feldstärken werden nach innen hin zunehmen. Dies läßt sich durch eine geeiget ansteigende Dielektrizitätskonstante und Permeabilität pauschalisieren.

Zur Berechnung der Feldverhältnisse wenden wir zunächst die Faradaygleichungen an, wobei die Vektorkomponenten in Kugel-Koordinaten r, φ, θ zu schreiben sind. Das Kreuzprodukt folgt aus der Determinantenschreibweise:

$$\underline{E} = \underline{v} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ 0 & 0 & v_\varphi \\ 0 & B_\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v_\varphi B_\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = -1/c^2\, \underline{v} \times \underline{E} = -1/c^2 \begin{vmatrix} \underline{e}_r & \underline{e}_\theta & \underline{e}_\varphi \\ 0 & 0 & v_\varphi \\ E_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_\varphi/c^2\, E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von E_r in B_θ liefert:

$$B_\theta = v_\varphi^2/c^2\, B_\theta = \omega^2 r^2/c^2\, B_\theta.$$

Es ergibt sich wieder die bekannte Bedingung, daß v gleich der Lichtgeschwindigkeit sein muß:

$$v_\varphi = \omega r = c.$$

Beide Felder sind also gekoppelt durch die Beziehung

$$E_r = v_\varphi B_\theta = \omega r\, B_\theta.$$

Wir betrachten im folgenden E_r als konstant gegeben. Nun berechnen wir die verschiedenen Differentialoperatoren (s. Anhang 8.3 für deren Form in Kugelkoordinaten):

$$\mathrm{div}\, \underline{v} = 0, \qquad \mathrm{rot}\, \underline{v} = \begin{pmatrix} \omega \cot\theta \\ -2\omega \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{div}\, \underline{D} = \mathrm{div}\, \varepsilon\, \underline{E} = \varepsilon_0\, R/r^2\, E_r, \qquad \mathrm{rot}\, \underline{E} = 0,$$

$$\mathrm{div}\, \underline{B} = -\cot\theta\, E_r/\omega r^2, \qquad \mathrm{rot}\, \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_r/\mu_0\omega r^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Ortsabhängigkeit von c müssen wir hierbei zwischen $\underline{E}$ und $\underline{D}$ bzw. $\underline{H}$ und $\underline{B}$ unterscheiden.

Wir berechnen die Ladungen in der Kugel. Die elektrische Ladung ist

$$Q_e = \int \mathrm{div}\, \underline{D}\, d^3r = \int_0^R R/r^2\, \varepsilon_0\, E_r\, r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2\, \varepsilon_0\, E_r.$$

Sie ist proportional der Oberfläche. Für die „magnetische“ Ladung folgt

$$Q_m = \int \mathrm{div}\, \underline{B}\, d^3r = \int_0^R E_r/\omega\, r^2\, dr \int_0^\pi \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 0,$$

da das Integral über θ verschwindet. Dasselbe ergibt sich auch für ein radiusabhängiges E_r. Somit ist das Modell konsistent mit den experimentellen Befunden. Insgesamt ergibt sich ein Modell mit folgenden Eigenschaften:

1. Das Geschwindigkeitsfeld hat eine nichtverschwindende Rotation.
2. Das elektrische Feld ist typisch für Ladungsträger: es wirkt nach außen wie eine Punktladung. Die Divergenz ergibt eine nichtverschwindende Gesamtladung. Das Feld ist wirbelfrei.
3. Das magnetische Feld ist ein Wirbelfeld mit nichtverschwindender Divergenz. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur klassischen Elektrodynamik.
4. Die Ladungen entsprechen den makroskopischen Befunden: Es gibt eine elektrische, aber keine magnetische Ladung.

6 Weiterführende Überlegungen

Nach dem jetzt gewonnenen Erkenntnisstand müßten im nächsten Schritt Lösungen der Feldgleichungen gefunden werden. Dazu müßten zunächst geeignete Problemstellungen spezifiziert und die Rand- und Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die Berechnungsmethode der zeitlichen Entwicklung müßte präzisiert werden.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, sich zunächst auf die Potentialstromdichte zu konzentrieren und von den alternativen Maxwellschen Gleichungen auszugehen. Es müßten Fälle konstruiert (und nach Möglichkeit experimentell überprüft) werden, in denen div $\underline{B} \neq 0$ ist.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Untersuchung relativistischer Effekte. Die Maxwelltheorie ist zwar Lorentz-invariant und gehorcht somit den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie, die Faraday-Gleichungen aber gehen darüber hinaus, denn sie lassen beschleunigte Bewegungen zu, wovon wir hier ausgiebig Gebrauch gemacht haben. Es wären also die Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie anzuwenden.

Dies impliziert ein größeres Forschungsprogramm. Zunächst müßten die Gleichungen in kovarianter Form mit Vierervektoren formuliert werden. Dann müßte man den entsprechenden Ausdruck für den Impulstensor finden. Dieser ist dann in die Einsteinschen Feldgleichungen einzusetzen. Auf diese Weise erhält man die Raumverzerrungen, die aufgrund des elektromagnetischen Feldes entstehen. Dies wäre dann auch der Weg, auf dem man die von K. Meyl postulierte Feldabhängigkeit der Längenkontraktion [2] quantitativ belegen (oder widerlegen) könnte.

Am Schluß sei noch auf ein Buch von Sallhofer [8] hingewiesen. Der Autor stellt eine elektromagnetische Theorie der Materie auf, die auf einem Analogon zwischen Optik und Mechanik basiert. Wir verzichten hier auf einen detaillierten Vergleich und begnügen uns mit dem Hinweis, daß unsere Ergebnisse mit denen Sallhofers kompatibel sind, ja sogar eine Begründung für den Ansatz Sallhofers liefern. Wir schließen mit einem Zitat aus seinem Buch (S. 40):

In der Kopenhagener Deutung [der Quantenmechanik] ist das Teilchen die reale Entität und die Welle das Kalkulative, das Unstoffliche einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit. In der Lichtdeutung ist dagegen das Lichtwellenfeld das Greifbare, Wirkliche und der Wellefeldschwerpunkt, also die Partikel, das Kalkulative, Unwirkliche und Immaterielle, das jeden Schwerpunkt ausmacht.

7 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß die Maxwellschen Gleichungen aus den Faraday-Gleichungen im Rahmen einer Feldtheorie herleitbar sind. Dabei muß eine räumliche Variation der Relativgeschwindigkeit zwischen Feld und Beobachter vernachlässigbar sein. Sofern dies nicht der Fall ist, hat man von den originalen Faraday-Gleichungen auszugehen. Im Rahmen einer reinen Feldtheorie stellen diese die Bestimmungsgleichungen der Felder dar, sind allerdings nicht voneinander unabhängig. Aus ihnen lassen sich direkt zwei zueinander duale Wirbelgleichungen ableiten. Energie- und Impulsbilanz stellen eine Verallgemeinerung des von der Maxwell-Theorie bekannten Ergebnisses dar. Daraus folgt eine Bestimmungsgleichung für die Felder und deren Geschwindigkeit. Der Weg der Herleitungen ist in folgendem Diagramm (Abb. 6) zusammengefaßt.

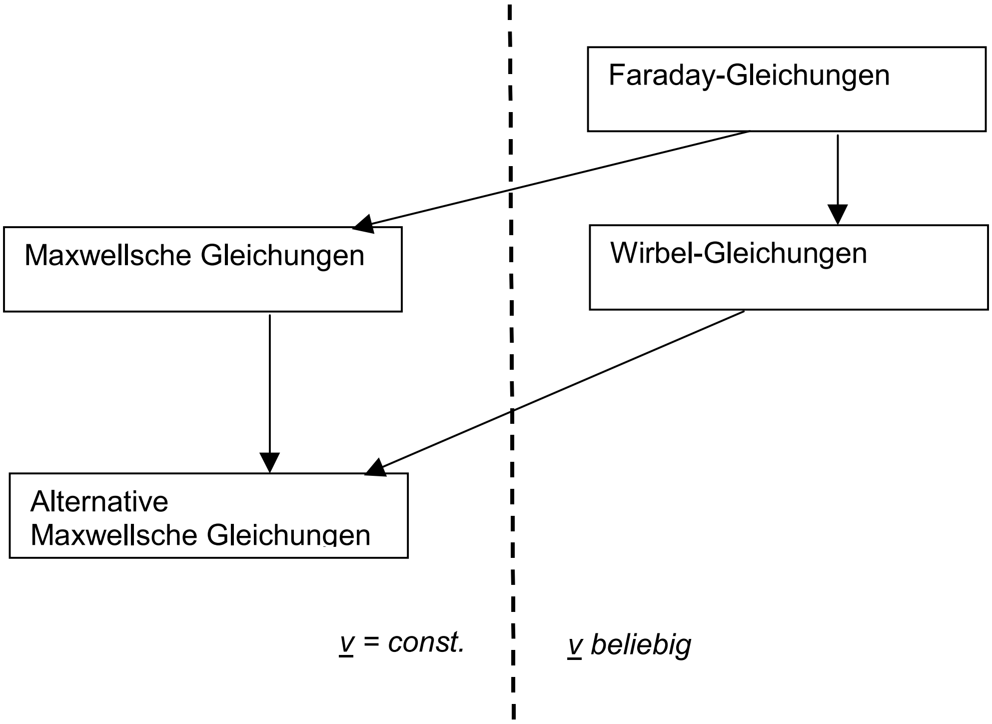


Abbildung 6: Diagramm der Herleitungen

8 Anhang A

8.1 Definition der Differentialoperatoren in kartesischen Koordinaten

f sei ein Skalarfeld $f(\underline{x}, t) : R^3 x R^1 \rightarrow R^1$; $\underline{u}$ sei ein Vektorfeld $\underline{u}(\underline{x}, t) : R^3 x R^1 \text{->} R^3$. Dann gelten die Definitionen

$$\text{grad } f = \nabla f = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3) \qquad \text{(A 1)}$$

$$\text{div } \underline{u} = \nabla \cdot \underline{u} = \partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3 \qquad \text{(A 2)}$$

$$\text{rot } \underline{u} = \nabla \text{ x } \underline{u} = (\partial u_3/\partial x_2 - \partial u_2/\partial x_3, \partial u_1/\partial x_3 - \partial u_3/\partial x_1, \partial u_2/\partial x_1 - \partial u_1/\partial x_2) \qquad \text{(A 3)}$$

Zuweilen wird der Gradient auf ein Vektorfeld angewandt. Damit ist gemeint:

$$\text{grad } \underline{u} = (\partial u_1/\partial x_1, \partial u_2/\partial x_2, \partial u_3/\partial x_3) \qquad \text{(A 4)}$$

Weiterhin gelten für die Vektorfelder $\underline{u}$, $\underline{v}$ die Abkürzungen

$$(\underline{v} \text{ grad*}) \underline{u} = (\underline{v} \nabla) \underline{u} = (v_1 \partial u_1/\partial x_1, v_2 \partial u_2/\partial x_2, v_3 \partial u_3/\partial x_3) \qquad \text{(A 5)}$$

$$\begin{aligned}(\underline{v} \text{ grad}) \underline{u} = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{u} = (&v_1 \partial u_1/\partial x_1 + v_2 \partial u_1/\partial x_2 + v_3 \partial u_1/\partial x_3, \qquad \text{(A 6)}\\ &v_1 \partial u_2/\partial x_1 + v_2 \partial u_2/\partial x_2 + v_3 \partial u_2/\partial x_3,\\ &v_1 \partial u_3/\partial x_1 + v_2 \partial u_3/\partial x_2 + v_3 \partial u_3/\partial x_3)\end{aligned}$$

8.2 Identitäten

$$\text{div rot } \underline{u} = 0 \qquad \text{(A 7)}$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$\text{div grad } f = \Delta f = \partial^2 f/\partial x_1^2 + \partial^2 f/\partial x_2^2 + \partial^2 f/\partial x_3^2 \qquad \text{(A 8)}$$

Zuweilen wird der Δ-Operator auch auf Vektorfelder angewandt:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{u} = (&\partial^2 u_1/\partial x_1^2 + \partial^2 u_1/\partial x_2^2 + \partial^2 u_1/\partial x_3^2, \qquad \text{(A 9)}\\ &\partial^2 u_2/\partial x_1^2 + \partial^2 u_2/\partial x_2^2 + \partial^2 u_2/\partial x_3^2,\\ &\partial^2 u_3/\partial x_1^2 + \partial^2 u_3/\partial x_2^2 + \partial^2 u_3/\partial x_3^2)\end{aligned}$$

Es gilt

$$\Delta \underline{u} = \text{grad div } \underline{u} - \text{rot rot } \underline{u} \qquad \text{(A 10)}$$

und für zwei Vekturfelder $\underline{u}$, $\underline{v}$:

$$\text{rot } (\underline{u} \text{ x } \underline{v}) = (\underline{v} \text{ grad*}) \underline{u} - (\underline{u} \text{ grad*}) \underline{v} + \underline{u} \text{ div } \underline{v} - \underline{v} \text{ div } \underline{u} \qquad \text{(A 11)}$$

$$\text{div } (\underline{u} \text{ x } \underline{v}) = \underline{v} \text{ rot } \underline{u} - \underline{u} \text{ rot } \underline{v} \qquad \text{(A 12)}$$

$$\underline{u} \text{ rot } \underline{v} = \underline{v} \text{ rot } \underline{u} + \text{div } (\underline{u} \text{ x } \underline{v}) \qquad \text{(A 13)}$$

$$\text{grad } u^2 = 2 (\underline{u} \text{ grad}) \underline{u} + 2 \underline{u} \text{ x rot } \underline{u} \qquad \text{(A 14)}$$

$$\text{grad } u^2 = 2 \underline{u} \text{ div } \underline{u} + (\underline{u} \text{ x grad}) \text{ x } \underline{u} \qquad \text{(A 15)}$$

Außerdem gilt die Identität für drei Vektorfelder:

$$\underline{u} \text{ x } (\underline{v} \text{ x } \underline{w}) = \underline{v} (\underline{u} \cdot \underline{w}) - \underline{w} (\underline{u} \cdot \underline{v}) \qquad \text{(A 16)}$$

8.3 Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten r, θ, φ gilt für die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{A} = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$:

$$\mathrm{div}\,\underline{A} = 1/r^2\ \partial/\partial r\ (r^2 A_r) + 1/(r \sin\theta)\ \partial/\partial\theta\ (\sin\theta\ A_\theta) + 1/(r \sin\theta)\ \partial A_\varphi/\partial\varphi$$

und für den Vektor der Rotation (komponentenweise für r, θ, φ):

$$(\mathrm{rot}\,\underline{A})_r = 1/(r \sin\theta)\ (\partial/\partial\theta\ (\sin\theta\ A_\varphi) - \partial A_\theta/\partial\varphi),$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{A})_\theta = 1/r\ (1/\sin\theta\ \partial A_r/\partial\varphi - \partial/\partial r\ (r A_\varphi)),$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{A})_\varphi = 1/r\ (\partial/\partial r\ (r A_\theta) - \partial A_r/\partial\theta).$$

Literaturverzeichnis

1. K. Meyl, Skalarwellen, NET-Jounal, Nr. 7/8 (2002), S. 31-37 und NET-Jounal, Nr. 9/10 (2002), S. 44-47
2. K. Meyl, Elektromagnetische Umweltverträglichkeit, Teil 1, Indel GmbH, Villingen-Schwennungen, 1996
3. K. Meyl, Potentialwirbel, Teil 1 und 2, Indel GmbH, Villingen-Schwennungen, 1990/1992
4. S. Flügge, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 2 – Mechanik der geordneten und ungeordneten Bewegungen, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1967
5. S. Flügge, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 3 – Das Maxwellsche Feld, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1961
6. Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch Zürich und Frankfurt/Main 1975
7. R. W. Pohl, Einführung in die Physik, Band 2 Elektrizitätslehre, 21. Aufl., Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1975
8. H. H. Sallhofer, Sackgasse Quantenphysik, Universitas-Verlag München, 2000