DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA 3: EL POSTULADO DE LA TÉTRADA

El postulado de la tétrada es el nombre que recibe la ecuación que resulta del requisito fundamental de que el campo vectorial completo sea independiente de sus componentes y elementos base. Sin esta propiedad matemática la física resultaría inconcebible, ya que, por ejemplo, en campo vectorial en un espacio de tres dimensiones en coordenadas cartesianas no sería el mismo campo vectorial si se le expresase mediante coordenadas esféricas polares. Toda demostración en geometría de Cartan se basa en el postulado de la tétrada, el cual fue introducido en 1925 o antes, y se ha enseñado desde entonces. La teoría ECE utiliza este postulado establecido de la tétrada.

<u>Demostración.</u>

Consideremos la derivada covariante de la geometría de Riemann:

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1}$$

y expresemos esta derivada covariante en un espaciotiempo rotulado con índices en alfabeto latino. Esto fue introducido por Cartan como el espacio tangencial de Minkowski a la variedad base en el punto P, pero se ha generalizado en la teoría ECE para describir el espín. La tétrada se define por:

$$V^a = q^a_\mu V^\mu \tag{2}$$

y la derivada covariante deviene:

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega^a_{\mu b} V^b \tag{3}$$

donde $w^a_{\mu b}$ es la conexión de espín. Puede utilizarse cualquier elemento base con el índice a, lo cual introduce una ventaja sobre la geometría de Riemann, cuyos elementos base son ∂_μ. El campo vectorial completo es el mismo, de manera que:

$$D\,V = D_\mu V^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu = D_\mu V^a \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \hat{q}_a \tag{4}$$

donde los elementos componentes y base del campo vectorial vienen dados. Los elementos base y componentes se relacionan entre sí mediante ecuaciones similares a (2):

$$\hat{q}_a = q^\sigma_a \, \partial_\sigma \tag{5}$$

y

$$V^a = q^a_\nu V^\nu \tag{6}$$

Por lo tanto, la ec. (4) puede expandirse como:

$$D\,V = (\partial_\mu\,(q^a_\nu\,V^\nu) + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda\,V^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes (q^\sigma_a \partial_\sigma) \tag{7}$$

Ahora utilicemos la propiedad conmutativa de las matrices para reescribir la ec. (7):

$$D\,V = q^\sigma_a\,(\partial_\mu(q^a_\nu V^\nu) + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma \tag{8}$$

Los índices ficticios σ ahora se vuelven a rotular como ν para dar:

$$D\,V = q^\nu_a\,(q^a_\nu\,\partial_\mu V^\nu + V^\nu \partial_\mu q^a_\nu + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda\,)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{9}$$

La convención de Cartan es que q^σ_a se define como la inversa de q^a_σ , de manera que:

$$q^\sigma_a\,.\,q^a_\sigma\;=1 \tag{10}$$

Por lo tanto, la ec. (9) deviene:

$$D\,V = (\,\partial_\mu V^\nu + q^\nu_a \partial_\mu q^a_\nu V^\nu + q^\nu_a \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{11}$$

Los índices ficticios ν en el segundo término a la derecha se vuelven a rotular como λ para dar:

$$D\,V = (\,\partial_\mu V^\nu + q^\nu_a(\partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda)V^\lambda)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \tag{12}$$

Comparando esta ecuación con la ec. (1) da:

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = q^\nu_a(\partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda) \tag{13}$$

y utilizando la ec.(10) obtenemos el postulado de la tétrada, que era lo que pretendíamos demostrar:

$$D_\mu\;q^a_\lambda = \partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} q^a_\nu \;=\;0 \tag{14}$$

en donde la derivada covariante actúa sobre un tensor de índice mixto de rango dos, la tétrada.

Notas adicionales a la Demostración 3, Ecuación 9:

La ecuación (9) era (sustituyendo a σ por ν en la ecuación original) :

$$D\,V = q^\sigma_a\,(q^a_\nu\,\partial_\mu V^\nu + V^\nu \partial_\mu q^a_\nu + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda V^\lambda\,)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma \tag{15}$$

$$= q_a^\sigma \; q_\nu^a \; \partial_\mu V^\nu + q_a^\sigma \; (V^\nu \partial_\mu q_\nu^a + \omega_{\mu b}^a q_\lambda^b V^\lambda \,) \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma \qquad (16)$$

La convención de Cartan es:

$$q_a^\sigma \; q_\nu^a = \delta_\nu^\sigma \qquad (17)$$

donde:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_\nu^\sigma = 1 & \text{si} & \sigma = \nu \\ \delta_\nu^\sigma = 0 & \text{si} & \sigma \neq \nu \end{array}\right\} \qquad (18)$$

La ecuación (1) es:

$$D\,V = q_a^\sigma \; q_\nu^a \; \partial_\mu V^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma + \ldots.$$

$$= \;\; \delta_\nu^\sigma \quad \partial_\mu V^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma + \ldots.$$

$$= \;\; \delta_0^0 \, \partial_\mu V^0 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_0 + \delta_1^1 \, \partial_\mu V^1 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_1 +$$

$$\delta_2^2 \, \partial_\mu V^2 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_2 + \delta_3^3 \, \partial_\mu V^3 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_3 + \ldots.$$

$$= \;\; \partial_\mu V^0 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_0 + \; \partial_\mu V^1 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_1 + \ldots.$$

$$\partial_\mu V^2 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_2 + \; \partial_\mu V^3 \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_3 + \ldots.$$

$$= \qquad \partial_\mu V^\nu \, \mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu + \ldots.$$

Q.E.D.